数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 64-71

An Application of Zeta Functions

近畿大学・産業技術研究科　金光　滋（Shigeru Kanemitsu）
Graduate School of Advanced Technology, Kinki University
名古屋大学・多元数理科学研究科　谷川好男（Yoshio Tanigawa）
Graduate School of Mathematics, Nagoya University
近畿大学・産業技術研究科　塚田春雄（Haruo Tsukada）
Graduate School of Advanced Technology, Kinki University
名古屋大学・多元数理科学研究科　学振研究員　吉元昌己（Masami Yoshimoto）
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

物理学においては、マーデルング定数などの（必ずしも収束しない）格子和があらわれる。特に $\displaystyle\sum_{\substack{a\in\mathbf{Z}^3\\ a\neq 0}}\frac{e^{-c\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ （$c>0$）の型の格子和はボーズ・アインシュタイン凝縮や、超電導体の研究にあらわれる。本稿ではエプシュタイン・ゼータ関数を使うことによって、Chaba-Pathria らの結果（[6]）が、きわめて容易に得られることを示す。

1．エプシュタイン・ゼータ関数

正定値の n 次の実対称行列 Y と n 次元実ベクトル g,h に対して、エプシュタイン・ゼータ関数は

$$Z(Y,g,h,s)=\sum_{\substack{a\in\mathbf{Z}^n\\ a+g\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{Y[a+g]^s}\quad\left(\mathrm{Re}(s)>\tfrac{n}{2}\right)$$

$$\Lambda(Y,g,h,s)=\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}Z(Y,g,h,s)$$

で定義される。ただし、$Y[a]=a\bullet Ya={}^t aYa=\sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}a_i a_j$ とする。エプシュタイン・ゼータ関数に関して、以下の公式が成り立っている。

（A）**不完全ガンマ展開**（[10], [11]）

不完全ガンマ関数 $\Gamma(s,c)=\int_c^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t$ （$s>0, c\geqq 0$）を使った展開が、$c>0$ に対して

$$\Lambda(Y,g,h,s)=\frac{1}{\sqrt{|Y|}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet h}}{\pi^{\frac{n}{2}-s}}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^n\\ a+h\neq 0}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet a}}{Y^{-1}[a+h]^{\frac{n}{2}-s}}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}-s,\pi c^{-1}Y^{-1}[a+h]\right)$$

$$+\frac{1}{\pi^s}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^n\\ a+g\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{Y[a+g]^s}\Gamma\left(s,\pi cY[a+g]\right)$$

$$+\delta(h)\frac{1}{\sqrt{|Y|}}\frac{c^{s-\frac{n}{2}}}{s-\frac{n}{2}}-\delta(g)\,e^{-2\pi i g\bullet h}\frac{c^s}{s}$$

で与えられる。ここで、$\delta(g)=\begin{cases}1 & (g\in\mathbb{Z}^n)\\ 0 & (g\notin\mathbb{Z}^n)\end{cases}$ （$g\in\mathbb{R}^n$）とした。

この式を利用して、$\Lambda(Y,g,h,s)$ を解析接続できる。

さらに、$0<\mathrm{Re}(s)<\frac{n}{2}$ の下で $c\to 0^+$ の極限をとって

$$\Lambda(Y,g,h,s)=\lim_{c\to 0^+}\left\{\frac{1}{\pi^s}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^n\\ a+g\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{Y[a+g]^s}\Gamma\left(s,\pi cY[a+g]\right)+\delta(h)\frac{1}{\sqrt{|Y|}}\frac{c^{s-\frac{n}{2}}}{s-\frac{n}{2}}\right\}$$

が得られ、$\mathrm{Re}(s)<0$ の下で $c\to\infty$ の極限を取って、関数等式

$$\Lambda(Y,g,h,s)=\frac{1}{\sqrt{|Y|}}\,e^{-2\pi i g\bullet h}\,\Lambda\left(Y^{-1},h,-g,\tfrac{n}{2}-s\right)$$

を得ることができる。

（B）メリン・バーンズ型公式（[6]）

第２種変形ベッセル関数　$K_s(z)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z\left(t+\frac{1}{t}\right)}t^{s-1}\,\mathrm{d}t$　を使った展開が、$b>0$　に対して

$$\Lambda(Y,g,h,s)=\frac{2\,e^{-2\pi i g\bullet h}}{\sqrt{|Y|}}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^n\\ a+h\neq 0}} e^{-2\pi i g\bullet a}\sqrt{\frac{b}{Y^{-1}[a+h]}}^{\frac{n}{2}-s} K_{\frac{n}{2}-s}\left(2\pi\sqrt{Y^{-1}[a+h]\,b}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^n\\ a+g\neq 0}} e^{2\pi i h\bullet a}\left(\frac{1}{Y[a+g]^s}-\frac{1}{(Y[a+g]+b)^s}\right)$$

$$+\delta(h)\frac{1}{\sqrt{|Y|}}\frac{\Gamma\left(s-\frac{n}{2}\right)}{\pi^{s-\frac{n}{2}}}\frac{1}{b^{s-\frac{n}{2}}}-\delta(g)\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\frac{e^{-2\pi i h\bullet g}}{b^s}$$

$$\left(\mathrm{Re}(s)>\tfrac{n}{2}-1,\ s\neq\tfrac{n}{2}\right)$$

で与えられる。

２．物理学への応用

前述の公式から、非常に簡単に Chaba-Pathria らの結果を導くことができる。

（A）不完全ガンマ関数をつかった展開式において、

$n=2,\ Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I,\ c\leftarrow\dfrac{c}{\pi},\ s=\dfrac{1}{2}$ とする。

$\mathrm{erfc}(z)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_z^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{1}{2},z^2\right)$ なので

$$Z\left(I,g,h,\tfrac{1}{2}\right)=e^{-2\pi i g\bullet h}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a+h\neq 0}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet a}}{|a+h|}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a+h|\right)$$

$$+\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a+g\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{|a+g|}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{c}\,|a+g|\right)-2\,\delta(h)\sqrt{\frac{\pi}{c}}-2\,\delta(g)\,e^{-2\pi i g\bullet h}\sqrt{\frac{c}{\pi}}$$

である。

（1） $g \notin \mathbb{Z}^2, h=0$ とおいて

$$Z\left(I,g,0,\tfrac{1}{2}\right)=\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet a}}{|a|}\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a|\right)+\sum_{a\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{|a+g|}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{c}\,|a+g|\right)-2\sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

（2） $g=0, h\notin\mathbb{Z}^2$ とおいて

$$Z\left(I,0,h,\tfrac{1}{2}\right)=\sum_{a\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{|a+h|}\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a+h|\right)+\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{|a|}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{c}\,|a|\right)-2\sqrt{\frac{c}{\pi}}$$

（3） $g=h=0$ とおいて

$$Z\left(I,0,0,\tfrac{1}{2}\right)=\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\frac{1}{|a|}\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a|\right)+\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\frac{1}{|a|}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{c}\,|a|\right)-2\sqrt{\frac{\pi}{c}}-2\sqrt{\frac{c}{\pi}}$$

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\frac{1}{|a|}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\pi}\,|a|\right)=\frac{1}{2}Z\left(I,0,0,\tfrac{1}{2}\right)+2=\frac{1}{2}\zeta\left(\tfrac{1}{2}\right)\beta\left(\tfrac{1}{2}\right)+2$$

$$\left(\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad \beta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}\right)$$

同様に、$n=3, Y=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I, c\leftarrow\dfrac{c}{\pi}$, $s=1$ とする。$\Gamma(1,z)=e^{-z}$ なので

$$Z(I,g,h,1)=\pi\,e^{-2\pi i g\bullet h}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a+h\neq 0}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet a}}{|a+h|}\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a+h|\right)$$
$$+\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a+g\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{|a+g|^2}e^{-c|a+g|^2}-2\,\delta(h)\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c}}-\delta(g)\,e^{-2\pi i g\bullet h}c$$

である。

（4） $g\notin\mathbb{Z}^3, h=0$ とおいて

$$Z(I,g,0,1)=\pi\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a\neq 0}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet a}}{|a|}\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a|\right)+T(g;c)-\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c}}=B(g)$$

$$\left(T(g;c)=\sum_{a\in\mathbb{Z}^3}\frac{e^{-c|a+g|^2}}{|a+g|^2},\quad B(g)=\lim_{c\to 0+}\left(T(g;c)-\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c}}\right)\right)$$

$$T(g;c)=\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c}}+B(g)-\pi\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\a\neq0}}\frac{e^{2\pi i g\bullet a}\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a|\right)}{|a|}$$

（5） $g=0, h\notin\mathbb{Z}^3$ とおいて

$$Z(I,0,h,1)=\pi\sum_{a\in\mathbb{Z}^3}\frac{1}{|a+h|}\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a+h|\right)+S(h;c)-c=A(h)$$

$$\left(S(h;c)=\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\a\neq0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}e^{-c|a|^2}}{|a|^2},\quad A(h)=\lim_{c\to0+}S(h;c)\right)$$

$$S(h;c)=c+A(h)-\pi\sum_{a\in\mathbb{Z}^3}\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a+h|\right)}{|a+h|}$$

（6） $g=h=0$ とおいて

$$Z(I,0,0,1)=\pi\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\a\neq0}}\frac{1}{|a|}\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{\sqrt{c}}|a|\right)+\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\a\neq0}}\frac{1}{|a|^2}e^{-c|a|^2}-2\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c}}-c$$

（B） 第２種変形ベッセル関数をつかった展開式において、

$n=2, Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I, b\leftarrow\frac{b^2}{4\pi^2}$, $s=\frac{1}{2}$ とする。$K_{\frac{1}{2}}(z)=K_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}$ なので

$$Z\left(I,g,h,\tfrac{1}{2}\right)=e^{-2\pi i g\bullet h}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\a+h\neq0}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet a}}{|a+h|}e^{-b|a+h|}$$

$$+\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\a+g\neq0}}e^{2\pi i h\bullet a}\left(\frac{1}{|a+g|}-\frac{1}{\sqrt{|a+g|^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}}\right)-\delta(h)\,b-\delta(g)\,e^{-2\pi i h\bullet g}\frac{2\pi}{b}$$

である。

（1） $g \notin \mathbb{Z}^2, h=0$ とおいて

$$Z\left(I,g,0,\tfrac{1}{2}\right)=\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet a}}{|a|}e^{-b|a|}+\sum_{a\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{1}{|a+g|}-\frac{1}{\sqrt{|a+g|^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}}\right)-b$$

（2） $g=0, h\notin \mathbb{Z}^2$ とおいて

$$Z\left(I,0,h,\tfrac{1}{2}\right)=\sum_{a\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{|a+h|}e^{-b|a+h|}+\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}e^{2\pi i h\bullet a}\left(\frac{1}{|a|}-\frac{1}{\sqrt{|a|^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}}\right)-\frac{2\pi}{b}$$

（3） $g=h=0$ とおいて

$$Z\left(I,0,0,\tfrac{1}{2}\right)=\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\frac{1}{|a|}e^{-b|a|}+\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\left(\frac{1}{|a|}-\frac{1}{\sqrt{|a|^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}}\right)-b-\frac{2\pi}{b}$$

$$=\lim_{b\to 0+}\left(=\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^2\\ a\neq 0}}\frac{1}{|a|}e^{-b|a|}-\frac{2\pi}{b}\right)$$

同様に、$n=3, Y=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I, b\leftarrow\frac{b^2}{4\pi^2}$, $s=1$ とする。

$$Z(I,g,h,1)=\pi\, e^{-2\pi i g\bullet h}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a+h\neq 0}}\frac{e^{-2\pi i g\bullet a}}{|a+h|}e^{-b|a+h|}$$

$$+\frac{b^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a+g\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{|a+g|^2\left(|a+g|^2+\frac{b^2}{4\pi^2}\right)}-\delta(h)\,b\pi-\delta(g)\,e^{-2\pi i h\bullet g}\frac{4\pi^2}{b^2}$$

である。

（4） $g \notin \mathbb{Z}^3, h=0$ とおいて

$$Z(I,g,0,1)=\pi\, U(g;b)+\frac{b^2}{4\pi^2}\sum_{a\in\mathbb{Z}^3}\frac{1}{|a+g|^2\left(|a+g|^2+\frac{b^2}{4\pi^2}\right)}-b\pi$$

$$\left(U(g;b)=\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a\neq 0}}\frac{e^{2\pi i g\bullet a}e^{-b|a|}}{|a|}\right)$$

$$U(g;b)=b+\frac{B(g)}{\pi}-\frac{b^2}{4\pi^3}\sum_{a\in\mathbb{Z}^3}\frac{1}{|a+g|^2\left(|a+g|^2+\dfrac{b^2}{4\pi^2}\right)}$$

（5） $g=0, h\notin\mathbb{Z}^3$ とおいて

$$Z(I,0,h,1)=\pi\, V(h;b)+\frac{b^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{|a|^2\left(|a|^2+\dfrac{b^2}{4\pi^2}\right)}-\frac{4\pi^2}{b^2}$$

$$\left(V(h;b)=\sum_{a\in\mathbb{Z}^3}\frac{e^{-b|a+h|}}{|a+h|}\right)$$

$$V(h;b)=\frac{4\pi}{b^2}+\frac{A(h)}{\pi}-\frac{b^2}{4\pi^3}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a\neq 0}}\frac{e^{2\pi i h\bullet a}}{|a|^2\left(|a|^2+\dfrac{b^2}{4\pi^2}\right)}$$

（6） $g=h=0$ とおいて

$$Z(I,0,0,1)=\pi\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a\neq 0}}\frac{1}{|a|}e^{-b|a|}+\frac{b^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^3\\ a\neq 0}}\frac{1}{|a|^2\left(|a|^2+\dfrac{b^2}{4\pi^2}\right)}-b\pi-\frac{4\pi^2}{b^2}$$

これらの一連の公式を含むより一般の公式に関しては、別の機会に発表する予定である。

参考文献

[1] F. V. Atkinson : Abel summation of certain Dirichlet series, Quart. J. Math. Oxford Ser. 19 (1948) 59-64.

[2] B. C. Berndt : Identities involving the coefficients of a class of Dirichlet series IV, Trans. A. M. S., 149 (1970) 179-185.

[3] B. C. Berndt : Identities involving the coefficients of a class of Dirichlet series VI, Trans. A. M. S., 160 (1971) 157-167.

[4] J. M. Borwein and P. B. Borwein : Pi and the AGM: A study in analytic number theory and computational complexity, Wiley, 1987.

[5] J. M. Borwein and P. B. Borwein : On some trigonometric and exponential lattice sums, J. Math. Analy. Appl. 188 (1994) 209-218.

[6] A. N. Chaba and R. K. Pathria : Evaluation of a class of lattice sums in arbitrary dimensions, J. Math. Phys. 16 (1975) 1457-1460.

[7] A. N. Chaba and R. K. Pathria : Evaluation of a class of lattice sums using Poisson's summation formula II, J. Phys. A: Math. Gen. 9 (1976) 1411-1423.

[8] A. N. Chaba and R. K. Pathria : Evaluation of a class of lattice sums using Poisson's summation formula III, J. Phys. A: Math. Gen. 9 (1976) 1801-1810.

[9] A. N. Chaba and R. K. Pathria : Evaluation of a class of lattice sums using Poisson's summation formula IV, J. Phys. A: Math. Gen. 10 (1977) 1823-1831.

[10] A. Terras : Bessel series expansions of the Epstein zeta function and the functional equation, Trans. A. M. S., 183 (1973) 477-486.

[11] A. Terras, : Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I, Springer Verlag, 1985.